Vorlesung 6a

Varianz und Kovarianz

Teil 1

Varianz und Standardabweichung:

Elementare Eigenschaften

(Buch S. 24)

X sei reellwertige Zufallsvariable

mit endlichem Erwartungswert μ.

Die **Varianz** von X ist definiert als

$$\mathbf{Var}[X] := \mathbf{E}[(X-\mu)^2],$$

die erwartete quadratische Abweichung

der Zufallsvariablen X von ihrem Erwartungswert μ.

Statt $\mathbf{Var}[X]$ schreiben wir auch

$$\mathbf{Var}\,X$$

oder

$$\sigma_X^2$$

oder (wenn klar ist, welche Zufallsvariable gemeint ist)

$$\sigma^2.$$

Wie ändert sich die Varianz,

wenn man X um eine Konstante verschiebt?

$$\mathbf{Var}[X+d] = \mathbf{E}[((X+d)-(\mu+d))^2] = \mathbf{Var}X$$

Dann bleibt die Varianz gleich!

Und wenn man X mit einer Konstanten multipliziert

("skaliert")?

$$\mathbf{Var}[cX] = \mathbf{E}[(cX-c\mu)^2] = c^2\mathbf{Var}X$$

Der Faktor tritt **quadratisch** heraus!

Definition.

Die **Standardabweichung (Streuung)** von X

ist die Wurzel aus der Varianz:

$$\sigma := \sigma_X := \sqrt{\mathbf{Var} X}$$

$$= \sqrt{\mathbf{E}[(X-\mu)^2]}.$$

Sie gibt an, mit welcher „typischen Abweichung“ der Zufallsvariablen X von ihrem Erwartungswert man “rechnen” sollte.

Es gilt:

$$\sigma_{X+d} = \sigma_X ,$$

$$\sigma_{cX} = c\,\sigma_X .$$

Man sagt: σ ist ein *Skalenparameter*.

Für Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert gilt:

$$\mathbf{Var}[X] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{P}\big(X = \mathbf{E}[X]\big) = 1 \; .$$

Die Äquivalenz sieht man aus der Gleichheit

$$\mathbf{Var}[X] = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2]$$

zusammen mit dem

Satz über die Positivität des Erwartungswertes.

Wenn es einen Ausgang (in diesem Fall eine Zahl) $\bar{a}$ gibt mit

$$\mathbf{P}\big(X = \bar{a}\big) = 1$$

sagt man auch:

X ist *fast sicher* konstant.

Wie der Erwartungswert ist auch die Varianz von X durch die Verteilung von X bestimmt:

Hat X Erwartungswert μ, so gilt

im diskteten Fall
(mit den Verteilungsgewichten $\rho(a),\ a \in S \subset \mathbb{R}$)

$$\mathbf{Var}\, X = \sum_{a \in S} (a-\mu)^2\, \rho(a)$$

und falls X Dichte $f(a)da, a \in \mathbb{R}$, besitzt:

$$\mathbf{Var}\, X = \int_{\mathbb{R}} (a-\mu)^2\, f(a)da\ .$$

Einfache Beispiele

Beispiel 1:

Eine faire Münze wird dreimal geworfen.

$X = Z_1 + Z_2 + Z_3$ ist die “Anzahl Köpfe”, $\mathbf{E}[X] = \frac{3}{2}$.

$$\mathbf{Var}\,[X]$$

$$= \frac{1}{8}(0 - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{8}(1 - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{8}(2 - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{8}(3 - \frac{3}{2})^2$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{9+3+3+9}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4}$$

Beispiel 2:

Eine p-Münze wird einmal geworfen.

$$\mathbf{P}(Z = 1) = p, \quad \mathbf{P}(Z = 0) = q$$

$$\mathbf{Var}[Z]$$

$$= q(0-p)^2 + p(1-p)^2 = qp^2 + p^2 q$$

$$= pq(p+q) = pq.$$

Beispiel 3:

Anzahl der Erfolge beim zweimaligen p-Münzwurf.

$$\mathbf{Var}[Z_1 + Z_2] = ?$$

Wir rechnen mit Zufallsvariablen:

$$\mathbf{E}[(Z_1 + Z_2 - 2p)^2] = \mathbf{E}[(Z_1 - p + Z_2 - p)^2]$$

$$= \mathbf{E}[(Z_1 - p)^2 + (Z_2 - p)^2 + 2(Z_1 - p)(Z_2 - p)]$$

$$= \mathbf{E}[(Z_1 - p)^2] + \mathbf{E}[(Z_2 - p)^2] + 2\mathbf{E}[(Z_1 - p)(Z_2 - p)]$$

Der letzte Term verschwindet wegen der Produktformel (V5b2), denn Z_1 und Z_2 sind unabhängig. Also:

$$\mathbf{Var}[Z_1 + Z_2] = \mathbf{Var}[Z_1] + \mathbf{Var}[Z_2] = 2pq.$$